درخت دانش

فصل اول: ترکیبیات و احتمال

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب
سبز: متوسط
قرمز: به این قسمت مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول به آن مبحث مسلط نیستید و دانش خود را در حد رنگ قرمز ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

تعداد سؤالات فصل
۱۷۵
تعداد سؤالات سراسری
۱۰۶
تعداد سؤالات سایر آزمون‌ها
۶۹

از فصل اول (ترکیبات و احتمال) به‌طور متوسط در هر سال ۳ تست در کنکورهای سه سال اخیر طرح شده است.
در این فصل ۱۷۵ تست از ترکیبیات و احتمال آورده‌ایم. یعنی برای هر تست کنکور در حدود ۶۰ تست را تمرین خواهید کرد.

۱. ترکیبیات

اصل ضرب: هرگاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و به ازای هر کدام از آنها جزء دوم به n طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه انجام آن عمل $m \times n$ حالت مختلف دارد.

اصل فوق را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

«هرگاه عملی از k جزء مختلف تشکیل شده باشد به طوری که جزء اول به n_1 طریق مختلف قابل انجام باشد و به ازای هر کدام از نحوه‌های انجام جزء اول، جزء دوم به n_2 طریق و به همین ترتیب به هر روشی که مراحل ۱ تا $(k-1)$ انجام شوند، مرحله‌ی kاُم به n_k طریق قابل انجام باشد؛ در این صورت آن عمل به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق قابل انجام است.»

■ **مثال:** با استفاده از ارقام $\{0,1,2,3\}$ چند عدد ۴ رقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت؟

◀ **حل:** پُر کردن خانه‌ها را از رقم هزارگان که دارای محدودیت است (باید عدد غیر صفر باشد) آغاز می‌کنیم.

$$\underset{①}{۳} \times \underset{②}{۳} \times \underset{③}{۲} \times \underset{④}{۱} = ۱۸$$

برای خانه‌ی ①، ۳ حالت امکان‌پذیر است (هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳).

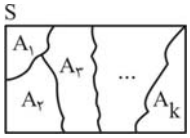
برای خانه‌ی ②، ۳ حالت امکان‌پذیر است (هر یک از اعداد، بجز عددی که در خانه‌ی ① قرار گرفته است).

و به همین ترتیب برای خانه‌های ③ و ④، به‌ترتیب ۲ و ۱ حالت امکان‌پذیر است پس طبق تعمیم اصل ضرب ۱۸ عدد با ویژگی مورد نظر مسأله موجود است.

برای حل اینگونه مسائل، نکته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

☑ **نکته:** در استفاده از اصل ضرب ابتدا اجزایی از عمل را در نظر می‌گیریم که دارای محدودیت هستند.

جایگشت: به هر روش قرار گرفتن چند شیء در کنار هم، یک جایگشت می‌گوییم.



اصل جمع: فرض کنید مجموعه‌ی S، اجتماع k مجموعه‌ی دو به دو جدای A_1، A_2، ... و A_k باشد، در این‌صورت تعداد اعضای S برابر با مجموع تعداد اعضای A_1، A_2، ... و A_k است. $n(S) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k)$

■ **مثال:** از جایگشت ارقام $\{0,1,2,3,4,5\}$ چند عدد ۴ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ بدون ارقام تکراری ساخته می‌شود؟

◀ **حل:** مجموعه‌ی اعداد مورد نظر سؤال را با S نشان می‌دهیم، در این‌صورت می‌توان گفت S اجتماع دو مجموعه‌ی جدا از هم A_1 و A_2 با تعریف زیر است:

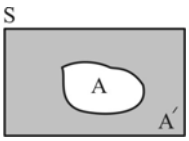
A_1 : اعضایی از S که رقم یکان آنها صفر است. $\quad A_1 : \underset{②}{۵} \times \underset{③}{۴} \times \underset{④}{۳} \times \underset{①}{۱} = ۶۰$

با در نظر گرفتن ترتیب پر شدن ارقام که زیر هر رقم نوشته شده است و استفاده از اصل ضرب، $n(A_1) = ۶۰$.

A_2 : اعضایی از S که رقم یکان آنها ۵ است. $\quad A_2 : \underset{②}{۴} \times \underset{③}{۴} \times \underset{④}{۳} \times \underset{①}{۱} = ۴۸$

با در نظر گرفتن ترتیب پر شدن ارقام که زیر هر رقم نوشته شده است و استفاده از اصل ضرب، $n(A_2) = ۴۸$.

در نهایت، با استفاده از اصل جمع خواهیم داشت $n(S) = n(A_1) + n(A_2) = ۱۰۸$.



اصل متمم: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از S باشد، در این‌صورت تعداد اعضایی از S که در A قرار ندارند برابر است با $n(S) - n(A)$، یعنی: $n(A') = n(S) - n(A)$

نماد فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم، یعنی $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$؛ همچنین قرارداد می‌کنیم که $0! = 1$.

از این تعریف نتیجه می‌شود: $\quad n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)! = \ldots$

قضیه تعداد جایگشت‌های خطی n شیء متمایز $n!$ است.

■ **مثال:** تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی "water" را در نظر بگیرید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) تعداد این جایگشت‌ها چندتاست؟

ب) در چه تعداد از این جایگشت‌ها، دو حرف a و w کنار هم هستند؟

پ) در چه تعداد از این جایگشت‌ها، دو حرف a و w کنار هم نیستند؟

◀ **حل:** الف) حروف کلمه‌ی water تشکیل ۵ شیء متمایز می‌دهند که در کنار هم $5!$ جایگشت دارند.

ب) دو حرف a و w را در کنار هم یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۳ حرف دیگر تشکیل ۴ شیء متمایز می‌دهند و در کنار هم $4!$ جایگشت دارند. از طرفی دو حرف a و w در کنار هم $2!$ جایگشت دارند، پس طبق اصل ضرب تعداد جایگشت‌های مطلوب $2! \times 4!$ است.

پ) با توجه به قسمت‌های «الف» و «ب» و در نظر گرفتن اصل متمم پاسخ این قسمت $5! - 2! \times 4!$ است.

: یکی از جایگشت‌های مطلوب ⓣⓔⓦⓐⓡ

ترتیب: تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز $(k \le n)$ را با نماد $P(n,k)$ نشان می‌دهند. طبق اصل ضرب، داریم:

$$P(n,k)=n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

☑ **نکته:** به بیان دیگر می‌توان گفت $P(n,k)$ تعداد راه‌های انتخاب مرتب k شیء از میان n شیء متمایز است. منظور از انتخاب مرتب آن است که ابتدا شیء اول انتخاب شود، سپس شیء دوم، سپس شیء سوم و ... .

ترکیب: ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز به انتخاب‌های k تایی از n شیء $(k \le n)$ اطلاق می‌شود که در آنها ترتیب فاقد اهمیت است. تعداد ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز با نماد $\binom{n}{k}$ یا $C(n,k)$ نشان داده می‌شود.

☑ **نکته:** به بیان دیگر می‌توان گفت $C(n,k)$ تعداد راه‌های انتخاب نامرتب k شیء از میان n شیء متمایز است. منظور از انتخاب نامرتب آن است که k شیء بطور همزمان از میان n شیء انتخاب شوند و ترتیب انتخاب آنها بی‌اهمیت است.

➢ **قضیه:** $P(n,k)=\binom{n}{k}\times k!$.

از قضیه‌ی بالا، می‌توان رابطه‌ی مهم $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ را نتیجه گرفت که نتایج آن به قرار زیر هستند:

(۱) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

(۲) $\binom{n}{k}=\binom{n}{k'}\Leftrightarrow k=k'$ یا $k+k'=n$

(۳) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ (اتحاد پاسکال)

(۴) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

(۵) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

(۶) $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

■ **مثال:** از میان ۶ دانش‌آموز اول و ۸ دانش‌آموز دوم، به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل داد، به طوری که دقیقاً ۲ دانش‌آموز اول عضو این کمیته باشند.

◀ **حل:** باید ۲ دانش‌آموز از میان ۶ دانش‌آموز اول انتخاب شود که این کار به $\binom{6}{2}$ حالت امکان‌پذیر است و ۳ دانش‌آموز از میان ۸ دانش‌آموز دوم انتخاب شود که این کار به $\binom{8}{3}$ حالت امکان‌پذیر است. پس با استفاده از اصل ضرب، این کار به $\binom{6}{2}\times\binom{8}{3}$ حالت امکان‌پذیر است.

☑ **نکته:** تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با $\binom{n}{k}$ است، از طرفی می‌دانیم که تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی 2^n است، پس: $\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=2^n$.

جایگشت‌های باتکرار: تعداد جایگشت‌های N شیء که n_1 تای آنها از نوع ۱، n_2 تای آنها از نوع ۲، ... و n_k تای آنها از نوع k است $(n_1+n_2+\ldots+n_k=N)$، برابر است با $\frac{N!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱

۷۸۰- چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیر صفراست؟ (سراسری انسانی – ۸۸)

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

۷۸۱- با جایگشت ارقام ۱،۲،۵،۵،۶ چند عدد ۵ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان ساخت؟ (سراسری انسانی – ۸۳)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۷۸۲- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ (سراسری تجربی – ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۷۸۳- پلاک اتومبیل‌سواری سری ب در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{***\ \text{ب}\ **}$ است که هر ستاره، نمایش یک رقم غیر صفر است، در سری ب و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ (سراسری انسانی – ۸۲)

۱) ۱۱۶۶۴ ۲) ۱۴۵۸۰ ۳) ۱۵۴۸۰ ۴) ۱۸۲۲۵

تیپ ۲

۷۸۴- ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۲)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۷۸۵- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت ، حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی – ۸۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۷۸۶- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b ، از آنها فقط یک نفر سخنرانی کند؟ (سراسری ریاضی – ۸۷)

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

تیپ ۳

۷۸۷- حروف کلمه‌ی ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد، به طوری که S ها یک در میان باشند؟ (سراسری انسانی – ۷۹)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۸۸- تعداد جایگشت‌های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمه‌ی DELAVAR کدام است؟ (سراسری انسانی – ۹۰)

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۵

تیپ ۴

۷۸۹- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته‌ی ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟ (سراسری انسانی – ۸۱)

۱) ۲۴۱۰ ۲) ۲۴۲۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۵۴۰

۷۹۰- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه به چند طریق می‌توان سه نفر را طوری انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر بین آن سه نفر باشد؟ (سراسری انسانی – ۸۰)

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۶۶ ۴) ۷۲

۷۹۱- از هر یک از مدارس A ، B ، C ، D و E ، چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟ (سراسری تجربی – ۹۲)

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۷۹۲- از ده پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آنکه حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب شود؟ (سراسری ریاضی – ۸۹)

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۷۹۳- از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به طوری‌که لااقل دو نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۰)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

تیپ ۵

۷۹۴- مقدار عبارت $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۷۵)

۱) $n(n+1)$ ۲) $n(n-1)$ ۳) $\frac{n+1}{n-1}$ ۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۷۹۵- حاصل $\frac{P(n,r)}{P(n+1,r+1)}$ کدام است؟ (سراسری انسانی – ۷۱)

۱) $\frac{1}{n+1}$ ۲) $\frac{r}{n}$ ۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ ۴) $\frac{r+1}{n+1}$

۷۹۶- اگر تعداد تبدیل‌های x شیء از ۵ شیء ، x برابر تعداد تبدیل‌های $(x-1)$ شیء از ۵ شیء باشد، x کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۶۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۹۷- اگر $C(n,4)=P(n-1,3)$ ، عدد n کدام است؟ (سراسری انسانی – ۸۴)

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۳۴ ۴) ۴۳

۷۹۸- اگر $\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)}=26$ ، مقدار n کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۴)

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

تیپ ۶

۷۹۹- تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل عضو a کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۳)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۸۰۰- یک مجموعه‌ی n عضوی ۵۵ زیر مجموعه‌ی $(n-2)$ عضوی دارد، n کدام است؟ (سراسری انسانی – ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

تیپ ۷

۸۰۱– تعداد اعداد هفت رقمی متشکل از جایگشت ارقام عدد ۵ ۵ ۶ ۵ ۲ ۳ ۲ کدام است؟ (سراسری انسانی – ۸۵)

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۵۶۰ ۴) ۸۴۰

۸۰۲– حروف کلمه‌ی EARNEST را به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار دارد به‌طوری که حرف N همواره در وسط قرار گیرد؟ (بدون توجه به مفهوم) (سراسری انسانی – ۹۱)

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۸۰۳– تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی SYSTEM به‌طوری که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور – ۹۲)

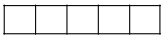
۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۸۰۴– عبارت $(x+y+z)(a+b)(c+d)$، پس از محاسبه چند جمله دارد؟ (ریاضی ۲– صفحه‌ی ۱۸۲– مسأله‌ی ۴– ب)

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۲۴

۸۰۵– با استفاده از ۳ رنگ آبی، قرمز و سبز، به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد، به‌طوری که خانه‌های مجاور رنگشان متفاوت باشد؟ (ریاضی ۲– صفحه‌ی ۱۸۲– مسأله‌ی ۶)



۱) ۱۰۸ ۲) ۷۲ ۳) ۹۶ ۴) ۴۸

۸۰۶– چند عدد دو رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (آزاد تجربی خارج از کشور – ۸۸)

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۸۰۷– چند عدد ۳ رقمی بدون رقم ۸ وجود دارد؟ (ریاضی ۲– صفحه‌ی ۱۸۲– مسأله‌ی ۵)

۱) ۵۱۲ ۲) ۷۲۹ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۹۶

۸۰۸– یک عدد سه رقمی را متقارن می‌نامیم، اگر رقم یکان و صدگان آن برابر باشند. چند عدد ۳ رقمی متقارن داریم؟ (ریاضی ۲– صفحه‌ی ۱۸۱– مسأله‌ی ۳)

۱) ۹۰ ۲) ۸۱۰ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

۸۰۹– چند عدد ۳ رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟ (ریاضی ۲– صفحه‌ی ۱۸۶– مسأله‌ی ۴)

۱) ۳۲۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۲۰

۸۱۰– در چه تعداد از جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer، عبارت "com" دیده می‌شود؟ (ریاضی ۲– صفحه‌ی ۱۸۶– مشابه مسأله‌ی ۲)

۱) $۳!\times۶!$ ۲) $۶!$ ۳) $\frac{۹!}{۳!}$ ۴) $۳!\times۹!$

۸۱۱– حروف کلمه‌ی ADDITION را به چند طرق می‌توان در کنار هم قرار داد به‌طوری که همواره حروف یکسان در کنار هم باشند؟ (آزمایشی سنجش تجربی – ۹۱)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

۸۱۲– ۳ کتاب متمایز علمی و ۴ کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب‌های ادبی یک در میان قرار بگیرند؟ (آزمایشی سنجش تجربی– ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۶۲ ۴) ۲۸۸

۸۱۳– یک هشت ضلعی منتظم مفروض است. تعداد مثلث‌هایی که با رأس‌های واقع بر رأس‌های این هشت ضلعی می‌توان ساخت، کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی – ۹۲)

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۸۱۴– از بین ۱۰ فوتبالیست، می‌خواهیم تیمی ۴ نفره تشکیل دهیم، به طوری که بهترین بازیکن حتماً انتخاب شود و بدترین بازیکن حتماً انتخاب نشود، این عمل به چند طریق قابل انجام است؟ (آزمون کانون تجربی– ۹۱)

۱) $\binom{۸}{۵}$ ۲) $\binom{۹}{۳}$ ۳) $\binom{۸}{۴}$ ۴) $\binom{۹}{۴}$

۸۱۵– از ۷ ورزشکار فوتبال و ۵ ورزشکار هندبال، به چند طریق می‌توان یک تیم ۵ نفری تشکیل داد، به‌طوری که لااقل ۳ نفر آنها ورزشکار فوتبال باشند؟ (آزمایشی سنجش تجربی – ۹۱)

۱) ۴۶۵ ۲) ۵۴۶ ۳) ۵۶۴ ۴) ۶۴۵

۸۱۶– قرار است یک شورای ۳ نفره از ساکنان یک آپارتمان که ۷ خانوار در آن زندگی می‌کنند، انتخاب شود، به طوری‌که از هر خانواده، تنها زن یا شوهر می‌تواند عضو این شورا شود، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (هر خانوار حتماً شامل زن و شوهر است) (آزمون کانون تجربی– ۹۰)

۱) ۳۵ ۲) ۷۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۲۸۰

۸۱۷– تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ کدام است؟ (ریاضی ۲– صفحه‌ی ۱۹۰– مسأله‌ی ۴)

۱) ۵۱۲ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۰ ۴) ۵۱۳

۸۱۸– یک مجموعه ۹ عضوی، چند زیر مجموعه‌ی ۲ تا ۸ عضوی دارد؟ (آزمون کانون تجربی– ۹۱)

۱) ۵۱۲ ۲) ۲۵۶ ۳) ۵۰۱ ۴) ۲۴۵

۲. احتمال — تعریف‌های مهم و محاسبه‌ی احتمال با استفاده از تعریف

پدیده (آزمایش) تصادفی: پدیده‌ای (آزمایشی) که از همه‌ی حالت‌های ممکن در بوقوع پیوستن آن مطلع باشیم، اما از این که کدام حالت قطعا رخ خواهد داد، اطمینان نداشته باشیم.

مانند پرتاب تاس، پرتاب سکه، جنسیت نوزاد قبل از تولد و ... .

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن در بوقوع پیوستن یک پدیده‌ی تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده‌ی تصادفی نامیده و معمولاً آن را با S نشان می‌دهیم.

مثلاً فضای نمونه‌ای در پرتاب یک تاس $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ است و یا فضای نمونه‌ای فرزندان یک خانواده‌ی ۳ فرزندی به‌صورت {پ‌پ‌پ، پ‌پ‌د، پ‌د‌پ، پ‌د‌د، د‌پ‌پ، د‌پ‌د، د‌د‌پ، د‌د‌د} $S=$ است.

پیشامد تصادفی: اگر یک پدیده‌ی تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه‌ای آن باشد، آنگاه هر زیرمجموعه‌ی S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

مثلاً اگر پیشامد تصادفی A، به‌صورت بیشتر بودن تعداد فرزندان دختر در یک خانواده‌ی ۳ فرزندی تعریف شود، آنگاه {د‌د‌پ، د‌پ‌د، پ‌د‌د، د‌د‌د} $A=$.

وقوع پیشامد تصادفی: وقتی می‌گوییم پیشامدی به وقوع پیوسته (رخ داده) است، یعنی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش مشاهده شده است.

احتمال پیشامد تصادفی: احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم که برای محاسبه‌ی آن، تعداد اعضای مجموعه‌ی A (یعنی $n(A)$ که تعداد حالت‌های مطلوب است) را بر تعداد اعضای مجموعه‌ی S (یعنی $n(S)$ که تعداد حالت‌های ممکن است) تقسیم می‌کنیم (یعنی $P(A)=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}=\frac{n(A)}{n(S)}$). از آنجا که A زیرمجموعه‌ی S است، پس $0\le n(A)\le n(S)$، بنابراین $0\le P(A)\le 1$؛ بیشتر بودن $P(A)$، بیشتر بودن شانس وقوع پیشامد A را نشان می‌دهد و بالعکس.

مثلاً با توجه به مثال قبل، احتمال آنکه در یک خانواده‌ی ۳ فرزندی، تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

توجه:

$$\begin{cases} P(A)=0 \Leftrightarrow A=\phi & \text{(پیشامد غیر ممکن)} \\ P(A)=1 \Leftrightarrow A=S & \text{(پیشامد قطعی)} \end{cases}$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۸

۸۱۹- اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۰ به‌وجود آید، احتمال آن که این عدد زوج باشد، کدام است؟ **(سراسری ریاضی- ۸۵)**

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۸۲۰- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟ **(سراسری تجربی- ۹۲)**

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

تیپ ۹

۸۲۱- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟ **(سراسری تجربی - ۹۲)**

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{5}{18}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{5}{12}$

تیپ ۱۰

۸۲۲- ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود، سوخته است. اگر ۳ لامپ به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم، احتمال این‌که هر سه لامپ سالم باشند، کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۱)**

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸۲۳- احتمال آن‌که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)**

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{4}{33}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{5}{33}$

۸۲۴- در یک کیسه ۵ مهره‌ی سفید و ۷ مهره‌ی سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که دو مهره، هم‌رنگ نباشند، کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۴)**

۱) $\frac{6}{11}$ ۲) $\frac{19}{33}$ ۳) $\frac{35}{66}$ ۴) $\frac{37}{66}$

۸۲۵– از ۴ نهال سیب قرمز و ۲ نهال سیب زرد، به‌طور تصادفی ۳ نهال کاشته شده است. احتمال آن‌که دو نهال سیب قرمز و یک نهال سیب زرد کاشته شده باشد، کدام است؟ **(سراسری تجربی – ۷۵)**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۸۲۶– از میان ۹ نفر دانش‌آموزی که ۵ نفر سال سوم و ۴ نفر سال دوم می‌باشند، ۵ نفر انتخاب شده‌اند. احتمال این‌که ۳ نفر از سال سوم و ۲ نفر از سال دوم باشند، چقدر است؟ **(سراسری تجربی– ۶۹)**

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۹}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۸۲۷– از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دو نفر از معرفی شدگان، از گروه ریاضی هستند؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۷)**

۱) $\frac{۲۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

۸۲۸– در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟ **(سراسری تجربی – ۸۶)**

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۸۲۹– از هر چهار گروه آزمایشی به‌ترتیب ۳، ۳، ۲ و ۱ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنان معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده‌اند؟ **(سراسری ریاضی – ۸۸)**

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

۸۳۰– دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو رأس مجاور باشند، برابر است با: **(سراسری ریاضی – ۶۵)**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۸۳۱– در ظرفی ۵ مهره به شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ ریخته‌ایم. دو مهره به تصادف و با هم از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که مجموع شماره‌ها بزرگ‌تر از ۵ باشد، کدام است؟ **(سراسری ریاضی – ۷۵)**

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۸۳۲– در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عددی فرد است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۷)**

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۸۳۳– اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته‌اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$ **(سراسری ریاضی – ۸۸)**

۸۳۴– در ظرفی شش مهره با شماره‌های ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ ریخته شده‌اند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال، شماره‌های این دو مهره اعداد متوالی‌اند؟ **(سراسری ریاضی – ۸۵)**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۸۳۵– شش گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آن‌ها برمی‌داریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو گوی کم‌تر از ۶ است؟ **(سراسری ریاضی – ۸۶)**

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۸۳۶– اعداد ۶ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ بر روی ۶ مهره‌ی یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره با هم بیرون بیاوریم، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌باشد؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۸)**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۸۳۷– اگر با ارقام ۶ و ۴ و ۱ و ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم، چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟ **(آزاد غیرپزشکی – ۸۷)**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۸۳۸- یکی از اعداد طبیعی ۳ رقمی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که رقم‌های یکان و صدگان این عدد با هم برابر باشند، کدام است؟ **(آزمون کانون تجربی- ۹۰)**

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۹}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

۸۳۹- اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ کارت یکسان نوشته، به تصادف و به ترتیب دو کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، شماره‌های هر دو کارت، مضرب ۳ هستند؟ **(آزمایشی سنجش تجربی - ۹۰)**

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۲۹}$ ۴) $\frac{۳}{۲۹}$

۸۴۰- ۳ اتومبیل سیاه و ۳ اتومبیل سفید، در یک ردیف، به تصادف کنار هم پارک شده‌اند. احتمال آنکه اتومبیل‌های سیاه و اتومبیل‌های سفید یک در میان قرار گرفته باشند، کدام است؟ **(آزمون کانون تجربی- ۹۱)**

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۸۴۱- کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. در این اداره، احتمال آنکه «کارمندی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد» چند برابر احتمال آن است که «کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد»؟ **(ریاضی عمومی- صفحه‌ی ۹)**

		جنسیت	
		زن	مرد
تحصیلات	دانشگاهی	۱۰	۱۵
	کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۳۵}{۳۹}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

۸۴۲- در پرتاب سه تاس، احتمال آن‌که مجموع سه تاس برابر ۶ باشد، کدام است؟ **(آزاد ریاضی- ۷۸)**

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۸۴۳- یک تاس را دو بار متوالیاً پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده ۷ است؟ **(آزمایشی سنجش تجربی- ۹۰)**

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۸۴۴- در پرتاب دو تاس، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده بزرگتر از ۹ است؟ **(آزمایشی سنجش تجربی - ۹۲)**

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۸۴۵- در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که مجموع دو تاس، عددی مضرب ۳ باشد کدام است؟ **(آزاد پزشکی عصر - ۸۸)**

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۴۶- اعداد ۱ تا ۹ را بر روی ۹ کارت یکسان نوشته و به تصادف ۲ کارت بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، مجموع این دو عدد، عددی فرد است؟ **(آزمایشی سنجش تجربی- ۹۰)**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۸۴۷- از جعبه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سبز، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه فقط ۲ تا از این مهره‌ها آبی باشند کدام است؟ **(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹- مثال ۳- ج)**

۱) $\frac{۱۴}{۵۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۶۵}$

۸۴۸- در ظرفی ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی سبز موجود است. اگر ۳ مهره بیرون آورده شود با کدام احتمال این مهره‌ها دو به دو هم‌رنگ نیستند؟ **(آزمایشی سنجش تجربی- ۹۰)**

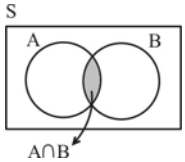
۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۸۴۹- می‌دانیم که خانواده‌ای دارای ۴ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر است. احتمال آن‌که در این خانواده فرزند اول پسر و فرزند آخر دختر باشد، کدام است؟ **(آزمون کانون تجربی- ۹۱)**

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۲. احتمال

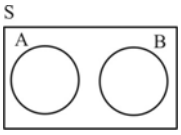
- ترکیب پیشامدها
- پیشامدهای ناسازگار و قانون جمع احتمالات
- خواص پیشامد متمم



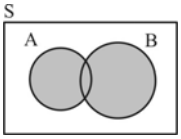
۱- اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه اشتراک آنها را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهد».

توجه: اگر پیشامد A زیرمجموعه‌ی پیشامد B باشد، آنگاه داریم $A \cap B = A$ و بالعکس، یعنی از $A \cap B = A$ می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq B$.

توجه: در مسائل احتمال، اشتراک ($\cap$) متناظر با عبارت «و» است.



پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که $A \cap B = \phi$، آنگاه دو پیشامد A و B ناسازگار نامیده می‌شوند، یعنی این دو پیشامد نمی‌توانند بطور همزمان اتفاق بیفتند.



۲- اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه اجتماع آنها را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دوی آنها رخ دهد».

با توجه به اینکه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$، از تقسیم طرفین این تساوی بر $n(S)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

توجه: در مسائل احتمال، اجتماع ($\cup$) متناظر با عبارت «یا» است.

اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آنگاه $A \cap B = \phi$ و در نتیجه $P(A \cap B) = ۰$، پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

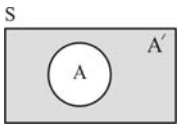
قانون جمع احتمال‌های پیشامدهای ناسازگار: تعمیم رابطه‌ی بالا به این صورت است: اگر A، B، C و ... پیشامدهایی دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه:

$$P(A \cup B \cup C \cup ...) = P(A) + P(B) + P(C) + ...$$

■ **مثال:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. ۲ مهره به تصادف و به طور همزمان خارج می‌کنیم. احتمال همرنگ بودن این دو مهره چقدر است؟

◀ **حل:** اگر A را پیشامد سفید بودن هر دو مهره‌ی خارج شده و B را پیشامد سیاه بودن هر دو مهره‌ی خارج شده در نظر بگیریم، آنگاه A و B ناسازگارند و $P(A \cup B)$ مورد نظر مسأله است، پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۳+۴}{۲}} + \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۳+۴}{۲}} = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۳+۶}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$$



۳- متمم یک پیشامد: اگر A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه متمم آن را A' نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد».

خواص پیشامد متمم

۱) $A \cap A' = \phi$ (یعنی A و A' ناسازگارند.)

۲) $A \cup A' = S$ (یعنی حتماً یکی از دو پیشامد A و A' رُخ می‌دهد.)

۳) $P(A) + P(A') = ۱ \Rightarrow P(A) = ۱ - P(A')$ یا $P(A') = ۱ - P(A)$

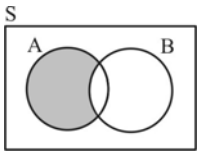
در بعضی مسائل، محاسبه‌ی $P(A')$ ساده‌تر از محاسبه‌ی $P(A)$ است، برای حل این مسائل از خاصیت ۳ در بالا استفاده می‌کنیم.

■ **مثال:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. ۳ مهره به تصادف و به طور همزمان خارج می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل ۱ مهره سفید باشد چقدر است؟

◀ **حل:** اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم، برای محاسبه‌ی $P(A)$ باید احتمال‌های ۳ حالت (یک مهره‌ی سفید، دو مهره‌ی سیاه)، (دو مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سیاه) و (سه مهره‌ی سفید، صفر مهره‌ی سیاه) را جداگانه حساب کرده و با هم جمع کنیم. اما توجه کنید که پیشامد A' عبارتست از آنکه «هیچ مهره‌ای سفید نباشد»، یعنی (صفر مهره‌ی سفید، سه مهره‌ی سیاه)، پس:

$$P(A') = \frac{\binom{۳}{۰}\binom{۴}{۳}}{\binom{۳+۴}{۳}} = \frac{۱ \times ۴}{۳۵} = \frac{۴}{۳۵} \Rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = \frac{۳۱}{۳۵}$$

۴- تفاضل دو پیشامد: *اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه تفاضل B از A را با نماد $A-B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد».*



با توجه به اینکه $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$، از تقسیم طرفین تساوی اخیر بر $n(S)$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

☑ نکته: از مجموعه‌ها می‌دانیم که $A-B=A\cap B'$.

■ مثال: در یک خانواده‌ی سه فرزندی، پیشامدهای A و C به صورت زیر تعریف شده‌اند:

A : تعداد فرزندان دختر بیش از تعداد فرزندان پسر باشد.
C : هم فرزند پسر و هم فرزند دختر در خانواده باشد.

پیشامدهای $A\cap C$، C' و $C-A$ را مشخص کنید و احتمال آن‌ها را به‌دست آورید.

◀ حل:

$$\begin{cases} A=\{\text{ددد، دپد، پدد، ددپ}\} \\ C=\{\text{پپد، پدپ، دپپ، ددپ، دپد، پدد}\}\end{cases} \Rightarrow A\cap C=\{\text{ددپ، دپد، پدد}\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{n(A\cap C)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

$$C'=\{\text{دد، پپپ}\}\Rightarrow P(C')=\frac{n(C')}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$C-A=\{\text{پپد، پدپ، دپپ}\}\Rightarrow P(C-A)=\frac{n(C-A)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱۱

۸۵۰- در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال اینکه حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸۵۱- احتمال این‌که در پرتاب دو تاس اعداد رو شده برابر، یا مجموع آن‌ها ۱۱ باشد، کدام است؟ (سراسری انسانی - ۸۴)

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۸۵۲- احتمال آن‌که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود، ۵۵٪ و در درس شیمی قبول شود، ۶۰٪ است. اگر احتمال آن‌که حداقل در یکی از دروس قبول شود، ۷۵٪ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟ (سراسری ریاضی - ۸۱)

۱) ٪۳۵ ۲) ٪۴۰ ۳) ٪۴۵ ۴) ٪۵۰

تیپ ۱۲

۸۵۳- در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده همرنگ‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

تیپ ۱۳

۸۵۴- تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۵۵- از ساکنین شهری، ۳۰ درصد روزنامه‌ی الف، ۲۵ درصد روزنامه‌ی ب و ۹ درصد روزنامه‌ی الف و ب را می‌خوانند. اگر فردی از بین آنها به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال، هیچ‌یک از این دو روزنامه را نمی‌خواند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۵۴ ۴) ۰/۵۶

۸۵۶- از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۲۶ ۴) ۰/۲۸

۸۵۷- برای انجام مسابقه‌ای، ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه، متفاوت‌اند؟ (سراسری ریاضی - ۸۵)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۸۵۸– در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۱)**

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$

۸۵۹– در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی خارج می‌شود؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۳)**

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۸۶۰– ۳ سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم؛ اگر دو پیشامد A و B را به‌صورت زیر تعریف کنیم: **(آزمون کانون تجربی – ۹۰)**

A : حداقل یکی از سکه‌ها به پشت بنشیند.
B : تعداد سکه‌هایی که به رو نشسته‌اند بیش‌تر از سکه‌هایی باشد که به پشت نشسته‌اند.

آنگاه احتمال پیشامد $A \cap B$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۸۶۱– خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. احتمال آنکه فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد، کدام است؟ **(ریاضی عمومی– صفحه‌ی ۴ و ۵)**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۸۶۲– تمام اعداد دو رقمی را که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ ساخت روی کارت‌های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه عدد خارج شده مضرب ۴ یا کوچکتر از ۴۰ باشد کدام است؟ **(ریاضی ۳– صفحه‌ی ۱۲– تمرین ۵)**

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۸۶۳– در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده ۷ یا ۸ باشد کدام است؟ **(آزمایشی سنجش تجربی – ۹۱)**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۶}$

۸۶۴– هر یک از اعداد ۱ تا ۳۰ بر روی کارت‌های یکسان نوشته و به تصادف دو کارت خارج می‌کنیم. با کدام احتمال شماره‌ی این دو کارت عددی اول یا بر ۷ بخش‌پذیر است؟ **(آزمایشی سنجش تجربی–۹۱)**

۱) $\frac{۱۸}{۱۴۵}$ ۲) $\frac{۲۲}{۱۴۵}$ ۳) $\frac{۲۶}{۱۴۵}$ ۴) $\frac{۱۸۲}{۴۳۵}$

۸۶۵– اگر $P(A)=۲P(B)=۳P(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}$ کدام است؟ **(آزاد ریاضی – ۸۲)**

۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۸۶۶– از سه دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی و دو دانش‌آموز رشته‌ی تجربی، دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد هر دو هم رشته باشند؟ **(آزاد غیر پزشکی – ۸۸)**

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۸۶۷– خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: **(ریاضی ۳– صفحه‌ی ۱۱– تمرین ۳– هـ)**

A : فرزندهای سوم و چهارم دختر باشند.
C : تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

احتمال پیشامد $A-C$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۶۸– A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S هستند. پیشامد «فقط A رخ می‌دهد یا فقط B رخ می‌دهد» در کدام گزینه بیان شده است؟ **(ریاضی ۳– صفحه‌ی ۱۱– تمرین ۴)**

۱) $A\cup B$ ۲) $S-(A\cap B)$ ۳) $A'\cap B'$ ۴) $(A-B)\cup(B-A)$

۸۶۹– از جعبه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سبز، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یکی از این ۳ مهره آبی باشد کدام است؟ **(ریاضی ۳– صفحه‌ی ۹– مثال ۳)**

۱) $\frac{۷}{۳۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۳۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

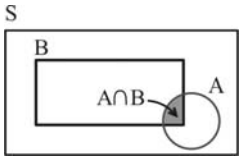
۸۷۰– در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که مجموع دو تاس عددی کوچکتر از ۱۱ باشد، چقدراست؟ **(آزاد پزشکی عصر – ۸۹)**

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۲. احتمال

- احتمال شرطی
- قانون احتمال کل و نمودار درختی
- پیشامدهای مستقل و قانون ضرب احتمالات

تعریف احتمال شرطی: اگر A پیشامدی دلخواه و B پیشامدی ناتهی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه اگر بدانیم B رخ داده است، احتمال A را با نماد $P(A|B)$ نشان داده و احتمال شرطی وقوع A به شرط وقوع B می‌نامیم. با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت که اگر بدانیم B رخ داده است، در واقع فضای نمونه‌ای S به B و پیشامد A به $A\cap B$ تبدیل شده و هر دو کوچک می‌شوند.



$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

■ **مثال:** در پرتاب دو تاس می‌دانیم که هر دو عدد رو شده فرد هستند، احتمال آنکه مجموع آنها بیش از ۷ باشد چقدر است؟

◀ **حل:** در نظر می‌گیریم: $\begin{cases} A: & \text{مجموع دو تاس بیش از ۷ باشد.} \\ B: & \text{هر دو تاس فرد باشد.} \end{cases}$

طبق اصل ضرب برای آنکه هر دو تاس فرد باشند، برای هر کدام ۳ حالت (۱، ۳ و۵) وجود دارد، پس $n(B)=۳\times ۳=۹$.

و همچنین: $A\cap B=\{(۳,۵),(۵,۳),(۵,۵)\}$، پس $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$.

یعنی در واقع از بین ۹ حالت $B=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),\underline{(۳,۵)},(۵,۱),\underline{(۵,۳)},\underline{(۵,۵)}\}$، ۳ حالتی که زیر آنها خط کشیده شده است مطلوب هستند که احتمال آن $\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$ است.

نتیجه‌ی مهم تعریف احتمال شرطی: در تساوی $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$، اگر صورت و مخرج کسر را بر $n(S)$ تقسیم کنیم به رابطه‌ی مهم زیر می‌رسیم:

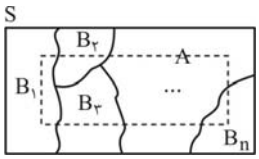
$$P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow\begin{cases}P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\ P(A\cap B)=P(B).P(A|B)\end{cases}$$

■ **مثال:** کیسه‌ای شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است، دو مهره به تصادف و به‌صورت جداگانه از آن خارج می‌کنیم. احتمال آنکه اولی سفید و دومی سیاه باشد، چقدر است؟

◀ **حل:** پیشامد سفید بودن مهره‌ی اول را با B و پیشامد سیاه بودن مهره‌ی دوم را با A نشان می‌دهیم، بنابراین $P(B)=\frac{۳}{۷}$؛ همچنین اگر بدانیم مهره‌ی اول سفید است، در خارج کردن مهره‌ی دوم ۲ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه داریم، بنابراین $P(A|B)=\frac{۴}{۶}$؛ از آنجا که در مسائل احتمال، عبارت «و» متناظر با اشتراک است، $P(A\cap B)$ مورد نظر سؤال است، داریم:

$$P(A\cap B)=P(B).P(A|B)=\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۷}$$

قانون احتمال کل: فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، ... و B_n پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند که حتماً یکی از آنها رخ می‌دهد (به عبارت دیگر یعنی $B_۱\cup B_۲\cup ...\cup B_n=S$) و همچنین فقط یکی از این پیشامدها بتواند رخ دهد (یعنی $B_۱$، $B_۲$ و ... B_n دو به دو ناسازگار باشند) آنگاه برای هر پیشامد دلخواه مانند A در این فضای نمونه‌ای، با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$A=(A\cap B_۱)\cup(A\cap B_۲)\cup ...\cup(A\cap B_n)\Rightarrow P(A)=P(A\cap B_۱)+P(A\cap B_۲)+...+P(A\cap B_n)$$
$$\Rightarrow P(A)=P(B_۱).P(A|B_۱)+P(B_۲).P(A|B_۲)+...+P(B_n).P(A|B_n)$$

توجه کنید که معمولاً مسائل مربوط به قانون احتمال کل را با استفاده از نمودار درختی حل می‌کنیم.

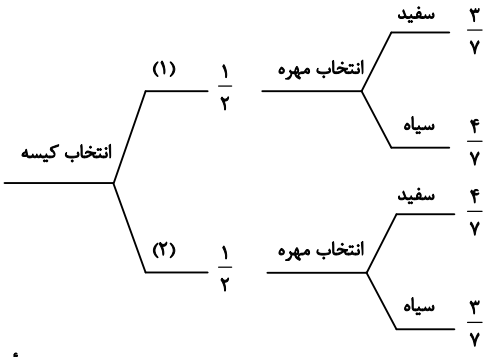
■ **مثال:** کیسه‌ی (۱) شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و کیسه‌ی (۲) شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. کیسه‌ای را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟

◀ **حل:** روش اول: A : پیشامد سفید بودن مهره، $B_۱$: پیشامد انتخاب کیسه‌ی (۱)، $B_۲$: پیشامد انتخاب کیسه‌ی (۲)

با استفاده از قانون احتمال کل:

$$P(A)=P(B_۱).P(A|B_۱)+P(B_۲).P(A|B_۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: با استفاده از نمودار درختی



احتمال مورد نظر : $P=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۳+۴}{۱۴}=\frac{۱}{۲}$

پیشامدهای مستقل: فرض کنید A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با این خاصیت که وقوع B در کاهش یا افزایش احتمال وقوع A بی‌تأثیر باشد، یعنی $P(A)=P(A\mid B)$ در این صورت دو پیشامد A و B مستقل نامیده می‌شوند. در چنین حالتی رابطه‌ی احتمال شرطی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\xrightarrow[P(A|B)=P(A)]{A\text{ و }B\text{ مستقل‌اند}}P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

عکس این موضوع هم صحیح است، یعنی
- اگر $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$، آنگاه A و B مستقل هستند.
- اگر $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$، آنگاه A و B وابسته هستند.

قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل: اگر A، B، C و ... پیشامدهایی دو به دو مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

$$P(A\cap B\cap C\cap ...)=P(A)\times P(B)\times P(C)\times ...$$

☑ **نکته‌ی (۱):** اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آنگاه:

۱- A' و B مستقل از همند. ۲- A و B' مستقل از همند. ۳- A' و B' مستقل از همند.

☑ **نکته (۲):** فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی باشند:
- اگر A و B ناسازگار باشند، حتماً وابسته هستند.
- اگر A و B مستقل باشند، حتماً سازگار هستند.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱۴

۸۷۱- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، کدام رابطه‌ی زیر همواره برقرار است؟ (سراسری ریاضی - ۶۵)

۱) $P(A\mid B)=۱$ ۲) $P(A\mid B)=۰$ ۳) $P(A\mid B)=P(A)$ ۴) $P(A\mid B)=P(B)$

۸۷۲- در یک خانواده‌ی دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۷۳- یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۸۷۴- در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است، با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۷۵- یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد مضرب ۳ نیست، احتمال آن‌که شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

تیپ ۱۵

۸۷۶- در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگه‌داری می‌شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال، فقط یکی از موش‌های فراری، دیابتی است؟ (سراسری تجربی - ۸۱)

۱) $\frac{۱۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۸۷۷- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ (سراسری تجربی - ۸۸)

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

تیپ ۱۶

۸۷۸- ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸ ۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

۸۷۹- در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه سلامت دارد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹ ۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

۸۸۰- احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، ۱۰ درصد و به فرزند دختر، ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می‌آید، این نوع بیماری را ندارد؟ (سراسری تجربی - ۸۳)

۱) ۰/۹۱ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۰/۹۳ ۴) ۰/۹۴

۸۸۱- احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ (سراسری تجربی - ۸۹)

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

۸۸۲- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۸۸۳- دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و دومی دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که مهره سفید باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۱)

۱) $\frac{۱۷}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۷}{۷۰}$ ۴) $\frac{۳۹}{۷۰}$

۸۸۴- در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

۸۸۵- دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه، در دومی ۷ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی- ۸۴)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳۴}{۸۱}$ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

۸۸۶- ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

تیپ ۱۷

۸۸۷- اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، کدام‌یک از روابط زیر همواره صحیح است؟ (سراسری ریاضی - ۷۶)

۱) $P(A\cup B)=P(A)\times P(B)$ ۲) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
۳) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$ ۴) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

۸۸۸- اگر $P(A)=۰/۸$ و $P(B)=۰/۳$ و $P(A\cap B)=۰/۲۴$، کدام عبارت زیر صحیح است؟ (سراسری ریاضی - ۷۲)

۱) A و B مستقل‌اند. ۲) A و B متمم‌اند.
۳) A و B ناسازگارند. ۴) A زیر مجموعه‌ی B است.

۸۸۹- اگر $P(A)=۰/۶$ و $P(B)=۰/۳$ و A و B مستقل باشند، $P(A\cup B)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۶۹)

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۷۲

۸۹۰– خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن‌که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند، کدام است؟ **(سراسری تجربی – ۸۲)**

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۸۹۱– در کارخانه‌ای دو دستگاه مستقل از هم کار می‌کنند. احتمال این‌که هر یک از این دو دستگاه کار کند ۰/۴ است. احتمال آن‌که هر دو دستگاه کار کنند، کدام است؟ **(سراسری ریاضی – ۷۳)**

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶۶ ۴) ۰/۸

۸۹۲– دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هیچ‌یک از اعداد رو شده، مضرب ۳ نیستند؟ **(سراسری ریاضی – ۷۹)**

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

۸۹۳– احتمال این‌که روز تولد دو نفر در یک روز از ایام هفته نباشد، کدام است؟ **(سراسری انسانی – ۸۴)**

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۸۹۴– احتمال این که روز تولد سه نفر در روزهای مختلف هفته باشد، کدام است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۴)**

۱) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۰}{۴۹}$ ۴) $\frac{۳۱}{۴۹}$

۸۹۵– اگر به طور تصادفی ۳ نفر از جامعه‌ای انتخاب شوند با کدام احتمال ماه تولد برای هر سه یکسان است؟ **(سراسری انسانی–۷۹)**

۱) $\frac{۱}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱}{۷۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۴۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۳۲}$

۸۹۶– در پرتاب یک تاس اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم، در غیر این صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یک سکه «رو» ظاهر می‌شود؟ **(سراسری ریاضی – ۷۸)**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

تیپ ۱۸

۸۹۷– در پرتاب دو تاس، با کدام احتمال اعداد ۵ یا ۶ هر دو ظاهر می‌شوند؟ **(سراسری انسانی – ۹۲)**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۸۹۸– برای رسیدن به مرحله‌ی نهایی مسابقات ورزشی لازم است تیم‌های شرکت‌کننده در دو دوره‌ی مسابقات مقدماتی شرکت کنند. تیمی که در هر دو دوره بازنده شود، به مرحله‌ی نهایی راه نخواهد یافت. اگر احتمال پیروزی در هر دوره بازی برای تیمی ۰/۴ باشد، احتمال حضور این تیم در مرحله‌ی نهایی کدام است؟ **(سراسری ریاضی – ۷۳)**

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۸

۸۹۹– چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آنها یکسان است؟ **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۲)**

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

تیپ ۱۹

۹۰۰– در یک جامعه، درصد گروه‌های خونی نوع **A** و **B** و **AB** و **O** به ترتیب ۴۰ و ۲۰ و ۱۰ و ۳۰ می‌باشد. اگر دو فرد از این جامعه انتخاب شوند، با کدام احتمال، فقط گروه خونی یکی از نوع **A** است؟ **(سراسری تجربی – ۷۷)**

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۳۶ ۳) ۰/۴۸ ۴) ۰/۶۴

۹۰۱– در جعبه‌ی **A**، ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی **B**، ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی سفید قرار دارد. از هر یک از دو جعبه یک مهره بیرون می‌کشیم، احتمال آن‌که هم‌رنگ باشند، کدام است؟ **(سراسری ریاضی – ۶۴)**

۱) $\frac{۶}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۳۵}$

۹۰۲– دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟ **(سراسری تجربی – ۹۱)**

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

تیپ ۲۰

۹۰۳- اگر ۷۵٪ افراد جامعه‌ای، دارای چشم مشکی و ۴۰٪ گروه خونی آن‌ها از نوع A باشد و یک فرد به‌طور تصادفی از بین آن‌ها انتخاب شود، احتمال این‌که این فرد دارای چشم مشکی یا گروه خونی A باشد، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۷۹)

۱) ۰/۷۸ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹۵

۹۰۴- در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند؛ اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۹۰۵- در پرتاب دو تاس، اگر هر دو عدد ظاهر شده کم‌تر از ۴ باشند، آنگاه احتمال آن‌که قدر مطلق تفاضل این دو عدد برابر با یک نباشد، کدام است؟ (آزمون کانون تجربی - ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۹۰۶- اگر $P(A')=۰/۷$ ، $P(B')=۰/۸$ و $P(A\mid B)=۰/۶$، آنگاه $P(B\mid A)$ کدام است؟ (آزمایشی سنجش تجربی - ۹۱)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۷۵

۹۰۷- اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $P(A\mid B')=۰/۴$ و $P(B)=۰/۳$، آنگاه احتمال وقوع پیشامد $A\cup B$ کدام است؟ (آزمون کانون تجربی - ۹۱)

۱) ۰/۵۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۶ ۴) ۰/۵۸

۹۰۸- مجموعه‌ی $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی است و می‌دانیم که $P(\{a,b,c\})=\frac{۱}{۲}$ و $P(\{a\})=\frac{۱}{۴}$. مقدار $P(\{c,b,d\}\mid\{a,b,c\})$ کدام است؟ (آزمون کانون تجربی - ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۹۰۹- در یک شهر، ۲۰ درصد مردان و ۱۵ درصد زنان مبتلا به چاقی هستند. در اداره‌ای که همه‌ی کارمندان آن ساکن این شهر هستند، تعداد کارمندان مرد، ۱/۵ برابر تعداد کارمندان زن است. با کدام احتمال، کارمندی که به تصادف از این اداره انتخاب می‌شود، مبتلا به چاقی است؟ (آزمون کانون تجربی - ۹۰)

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۱۷ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۱۹

۹۱۰- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم؛ اگر دو پیشامد A و B را به‌صورت زیر تعریف کنیم: (آزمون کانون تجربی - ۹۱)

A : در پرتاب اول، عدد ۴ ظاهر شود.
B : مجموع دو عدد رو شده، برابر ۷ باشد.

آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) A و B متمم یک‌دیگرند.
۲) A و B ناسازگارند ولی متمم یک‌دیگر نیستند.
۳) A و B مستقل از یک‌دیگرند.
۴) A زیر مجموعه‌ی B است.

۹۱۱- در پرتاب دو تاس با هم، با کدام احتمال هر دو عدد رو شده زوج است؟ (آزمایشی سنجش تجربی - ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۹۱۲- در پرتاب دو تاس، احتمال هر دو زوج آمدن را $P(A)$ واحتمال هر دو فرد آمدن را $P(B)$ می‌نامیم. کدام گزینه درست است؟ (آزاد تجربی - ۷۹)

۱) $P^۲(A)+P^۲(B)=\frac{۱}{۸}$ ۲) $P^۲(A)+P^۲(B)=\frac{۱}{۴}$
۳) $P^۲(A)+P^۲(B)=\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $P^۲(A)+P^۲(B)=\frac{۱}{۲}$

۹۱۳- دو تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال آنکه اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۹- تمرین ۹-ب)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۹۱۴- در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که اعداد دو تاس، مساوی نباشند، چقدر است؟ (آزاد تجربی - ۷۸)

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

۹۱۵- تاسی را سه بار می‌اندازیم. احتمال آنکه «هر ۳ عدد رو شده متمایز باشند»، چند برابر احتمال آن است که «هر ۳ عدد رو شده مثل هم باشند»؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۷- مثال ۷-الف و ب)

۱) ۳۵ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۹۱۶- چقدر احتمال دارد در یک تیم ۶ نفره، هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۵- مثال ۴)

۱) $\frac{\binom{۱۲}{۶}}{۱۲^۶}$ ۲) $\frac{۶!}{۱۲^۶}$ ۳) $\frac{P(۱۲,۶)}{۱۲^۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲^۶}$

۹۱۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A\cap B)=[P(A)]^۲$ باشد، $P(\bar{A})$ کدام است؟ ($\bar{A}$ متمم پیشامد A است) (آزاد تجربی - ۷۷)

۱) $P(A)$ ۲) $P(A)\times P(B)$ ۳) $۱-P(A)\times P(B)$ ۴) $۱-P(B)$

۹۱۸- اگر A و B دو پیشامد ناتهی مستقل از هم در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟ (آزمایشی سنجش تجربی - ۹۱)

۱) $(A\cap B)$ و $(A\cap B')$ ناسازگارند.
۲) A و B' مستقل
۳) A و B' ناسازگار
۴) A' و B' مستقل

۹۱۹- آزمایش‌ها نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A بعد از یک عمل جراحی ۸۰ درصد و همین احتمال برای شخص B، ۶۰ درصد است. احتمال آنکه حداقل یکی از این دو نفر بعد از این عمل جراحی بهبود یابد، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مثال ۲)

۱) ٪۹۱ ۲) ٪۹۲ ۳) ٪۹۰ ۴) ٪۸۹

۹۲۰- احتمال آنکه شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶ و همین احتمال برای شخص B، برابر ۰/۷ است. احتمال آنکه حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۹- تمرین ۷-ب)

۱) ۰/۵۸ ۲) ۰/۷۷ ۳) ۰/۶۶ ۴) ۰/۴۲

۹۲۱- احتمال آنکه فرد A در آزمایشی قبول شود ۰/۸ و احتمال قبولی B در این آزمایش ۰/۷ است. با کدام احتمال، لااقل یکی از آنها قبول نمی‌شود؟ (آزمایشی سنجش تجربی-۹۰)

۱) ۰/۳۸ ۲) ۰/۴۴ ۳) ۰/۵۴ ۴) ۰/۵

۹۲۲- اگر احتمال وقوع دو پیشامد مستقل $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشد، با کدام احتمال هیچ‌یک از دو پیشامد واقع نمی‌شوند؟ (آزمایشی سنجش تجربی-۹۰)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۹۲۳- اگر $\frac{۳}{۷}$ ژن‌های تعیین‌کننده‌ی RH خون منفی باشند، با کدام احتمال RH خون فردی ممکن است منفی نباشد؟ (آزمایشی سنجش تجربی-۹۰)

۱) $\frac{۹}{۴۹}$ ۲) $\frac{۱۶}{۴۹}$ ۳) $\frac{۲۸}{۴۹}$ ۴) $\frac{۴۰}{۴۹}$

۹۲۴- اگر بدانیم که ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی هستند، آنگاه احتمال آنکه RH خون فردی منفی نباشد، چند برابر احتمال آن است که RH خون او منفی باشد؟ (ریاضی عمومی- صفحه‌ی ۷- مثال ۱۱ و مسئله‌ی ۱)

۱) ۱/۵ ۲) ۴ ۳) ۵/۲۵ ۴) ۶

۹۲۵- احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{۱}{۴}$ است. چقدر احتمال دارد فرزند اول و دوم این خانواده هم‌جنس باشند؟ (آزاد پزشکی - ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۹۲۶- احتمال آن‌که در یک خانواده چهار فرزندی ۲ فرزند بزرگ‌تر هم‌جنس و دو فرزند کوچک‌تر جنسیت مختلف داشته باشند، چه قدر است؟ (آزاد غیرپزشکی - ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$